

非圧縮性粘性流れに対する射影法と圧力を含む境界条件

松井 一徳*¹

Projection methods and boundary conditions involving the pressure for incompressible viscous flows

Kazunori MATSUI*¹

ABSTRACT : We consider a projection method for time-dependent incompressible Navier–Stokes equations with pressure boundary conditions. The projection method is one of the numerical calculation methods for incompressible viscous fluids often used in engineering. In general, the projection method needs additional boundary conditions to solve a pressure–Poisson equation, which does not appear in the original Navier–Stokes problem. On the other hand, many mechanisms generate flow by creating a pressure difference, such as water distribution systems and blood circulation.

Traction and open boundary conditions are often used to impose pressure boundary conditions. We review recent studies on these boundary conditions and propose a new additional boundary condition for the projection method with a Dirichlet-type pressure boundary condition and no tangent flow. We show stability for the scheme and error estimates for the velocity and pressure under suitable norms.

Keywords : projection method, pressure boundary condition, total pressure

(Received December 1, 2022)

1. はじめに

水道、血液循環や油圧システムなど圧力駆動の流れは多くあり、流体領域の境界の一部で圧力値が与えられた場合に内部でどのような流れになるかシミュレーションすることは応用上重要である。しかし、数学的に流体問題を考える場合には流速に対してのみディリクレ境界条件を課すことが多く、単に圧力だけに境界条件として与えたとしても ill-posed な境界条件になってしまうということもあり、圧力を含む境界条件についてはあまり調べられていない。

一方で、流体問題に対する数値計算手法の 1 つに射影法があり、射影法では非圧縮性条件の代わりに圧力ポアソン方程式を解く。上記の背景もあり、この圧力ポアソン方程式に対してディリクレ境界条件を課されることがしばしばある。

本稿では、通常の射影法について述べた後に、どのよ

うな状況で圧力ポアソン方程式に対してディリクレ境界条件をどのように課しているかを紹介する。そして、それらの境界条件を流入部で考える場合の問題点を確認し、それらの問題点を回避できる [23] で提案した全圧を含む境界条件について解説する。

構成は次の通りである。通常の射影法について 2 章で述べ、3 章では流出境界条件として一般的に用いられている traction boundary condition と open boundary condition について紹介する。これらの境界条件は近年研究が進んでいるので、安定性評価や誤差解析を行なっている文献を中心に現在の状況について簡単にまとめた。4 章では、[23] で提案した全圧を含む境界条件を課した射影法とその安定性と収束性について紹介する。最後に 5 章でまとめと今後の展望について述べる。

2. 非圧縮性ナビエ・ストークス方程式と射影法

$T > 0$ とし、 Ω を \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) 内の有界リプシッツ領域とする。境界全周で流速に対してディリクレ境界条

*¹ : 理工学科助教 (kazunori-matsui@st.seikei.ac.jp)

件を課した次の非圧縮性ナビエ・ストークス方程式をまず考える.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \frac{1}{\rho} \nabla p = f & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで, $\nu, \rho > 0, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, u_0 \in \mathbb{R}^d$ は既知とする. 第2式は非圧縮性条件と呼ばれ, 有限差分法や粒子法ではいかに非圧縮性条件を課すかが問題の1つとなる. 射影法 [7, 31] ではどのようにしてこの非圧縮性条件へアプローチしているかについて確認する.

$\tau (= T/N < 1, N \in \mathbb{N})$ を時間刻み幅とし $t_k := k\tau (k = 0, 1, \dots, N)$ とおく. 流速の初期値を u_0 として次の (Step 1) と (Step 2) を繰り返し解くことで $u_k^*, u_k, p_k (k = 1, 2, \dots, N)$ を計算する.

Step 1 (viscous prediction): 次を満たす $u_k^*: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ を求める.

$$\begin{cases} \frac{u_k^* - u_{k-1}}{\tau} + (u_{k-1}^* \cdot \nabla)u_k^* - \nu \Delta u_k^* = f(t_k) & \text{in } \Omega, \\ u_k^* = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Step 2 (projection):

$\int_{\Omega} p_k dx = 0$ と次の方程式系を満たす $u_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ および $p_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ.

$$\begin{cases} \frac{u_k - u_k^*}{\tau} + \frac{1}{\rho} \nabla p_k = 0 & \text{in } \Omega, \\ u_k = 0 & \text{in } \Omega, \\ u_k \cdot n = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

ここで, n は境界 $\partial\Omega$ に対する外向き単位法線ベクトルである.

(Step 1) は圧力項を取り除いた問題になっており, 一般に $\operatorname{div} u_k^* = 0$ とは限らない. そこで (Step 2) では, この u_k^* をヘルムホルツ分解することで divergence-free な空間へ射影する. 具体的な (Step 2) での計算方法は次のとおりである:

$\int_{\Omega} p_k dx = 0$ と次を満たす $u_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ および $p_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ.

$$\begin{cases} -\frac{\tau}{\rho} \Delta p_k = -\operatorname{div} u_k^* & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial p_k}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$u_k = u_k^* - \frac{\tau}{\rho} \nabla p_k \quad \text{in } \Omega. \quad (2.5)$$

この圧力に関する偏微分方程式は圧力ポアソン方程式

と呼ばれ, これを解くことにより p_k が得られる. (2.5) を計算することで u_k が得られ, この発散 $\operatorname{div} u_k$ は (2.4) の第一式より 0 であることがわかる.

2つの2階偏微分方程式を解くためには, ナビエ・ストークス問題の境界条件だけでは足りず, 追加の境界条件が必要となる. この場合では, 圧力勾配ゼロが追加の境界条件となっている. 実際の圧力の法線方向微分は一般にはゼロではなく, この p_k は「仮想的な」圧力と呼ばれることもある.

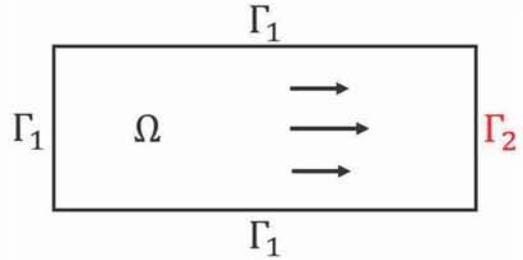


Fig.1 A flow inside a pipe

3. よく用いられる圧力境界条件とその問題点

3. 1. Traction boundary condition と open boundary condition

Fig. 1 のような管状領域の下流 Γ_2 で下記のような境界条件が工学などではよく用いられる (境界 Γ_1 では流速ディリクレ境界条件を課しているものとする).

- Traction boundary condition (TBC)

$$\rho \nu E(u)n - pn = -p^b n,$$

ただし, $E(u)_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i (i, j = 1, \dots, d)$ であり, p^b は既知の関数とする.

- Open boundary condition (OBC)

$$\rho \nu \frac{\partial u}{\partial n} - pn = -p^b n.$$

$\rho \nu E(u)n - pn$ は物理的には応力テンソルの法線方向成分を意味するものであり, TBCは応力境界条件と呼ばれることもある. OBCがどのような境界条件か説明するためにハーゲン・ポアズイユ流を紹介する. ハーゲン・ポアズイユ流とは, 円管領域内での非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の定常解であり, 円管の軸を x 軸にとり, 半径を R としたとき, (2次元領域の場合) 次のような形で表示される (U_{\max}, C は定数).

$$u(x, y) = \begin{pmatrix} U_{\max}(1 - y^2/R^2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$p(x, y) = -\frac{2\rho \nu U_{\max}}{R^2} x + C.$$

ハーゲン・ポアズイユ流では下流 Γ_2 の部分で $\partial u /$

$\partial n = 0$ を満たし、圧力が定数になるため、ポワズイユ流はOBCを満たす定数 p^b をとることができる (一方でTBCが成立することはない). そのため、OBCは有用な境界条件としてよく使われている. なお、「open boundary condition」は広い意味を持つので、論文を読む際にはどの境界条件を指しているか確認する必要がある. これらの2つの境界条件がどう異なるかについての研究は多くあるが、境界での流れの違いは [13, Fig. 4] がわかりやすい.

OBCを射影法に対して適用する場合には、Step 1で

$$\begin{cases} u_k^* = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u_k^*}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma_2 \end{cases}$$

を流速に対して課し、Step 2 では圧力ポアソン方程式に対して

$$\begin{cases} \frac{\partial p_k}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ p_k = p^b(t_k) & \text{on } \Gamma_2 \end{cases}$$

を課す. このようにOBC(またはTBC)を課した場合についての誤差評価 [14] は流速に対して全周ディリクレ境界条件を課した場合よりも悪いことが知られている [15] (なお、[14, 15] では圧力修正法についての誤差評価を行っている). これは、元々のナビエ・ストークス問題の圧力解 p の境界値は必ずしも境界条件で用いた値 p^b と一致しないことに起因している.

より良い収束オーダーが得られるスキームとして、Marker and cell (MAC) 法 [17, 32] で現れるような圧力ポアソン方程式を用いる手法 [12, 22, 30] や、圧力ディリクレ境界条件を修正する手法 [26]、流速に課している応力境界条件に対し補正項を導入する方法 [1] が提案されている. [21]では、[1] と圧力修正スキップを改良したスキーム [4] を組み合わせたものを考えており、安定性証明も行っている ([12] との関連について [21, Remark 4.14] で言及がある). しかし、境界が滑らかでない場合の数値計算で得られた収束オーダーは理論的な最適評価を実現できておらず、この問題を解決する方法の模索は現在も続いている.

近年も sharp rate projection step をさらにステップとして追加する手法 [25] (動粘度係数が時間や空間に依存する場合に対応するスキーム [10]を応力境界条件にも対応できるよう拡張したもの) の提案や、非ニュートン流体 [24] に対する拡張も行われている.

3. 2. エネルギー評価

射影法にかかわらずナビエ・ストークス方程式にOBC

やTBCを課した場合、境界からのエネルギーの流入があるために安定性評価が困難になる問題点がある.

簡単のため、解は十分滑らかだと仮定する. ナビエ・ストークス方程式の両辺に流速 u を掛けて領域 Ω 上で積分すると、Gaussの発散定理より移流項は境界での積分になり、圧力項は非圧縮性条件から境界だけの積分になる:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f \cdot u dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u \cdot \nabla |u|^2 dx - \nu \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u ds \\ & \quad + \nu \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma} p u \cdot n ds - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} p \operatorname{div} u dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} |u|^2 u \cdot n ds \\ & \quad + \nu \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma_2} p^b u \cdot n ds. \end{aligned}$$

よって、次の不等式が得られる.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \int_{\Gamma_2} |u|^2 u \cdot n ds + \nu \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2 \\ & \leq \frac{c}{\nu} \left(\|f\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{\rho^2} \|p^b\|_{H^1(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

ここで、 c は領域 Ω と境界 Γ_1, Γ_2 にのみ依存する正の定数である. この不等式を初期時刻 0 から適当な時刻 $t (\leq T)$ まで積分すれば、エネルギー不等式が導かれる.

$$\begin{aligned} & \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \int_0^t \int_{\Gamma_2} |u|^2 u \cdot n ds dt + \nu \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2 dt \\ & \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{c}{\nu} \int_0^t \left(\|f\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{\rho^2} \|p^b\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt. \end{aligned}$$

ここで、移流項から出てきた境界上での積分は非負とは限らない. 例えば、 Γ_2 から流入がある場合にこの積分は負になり得る. その場合、 $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)^d}$ などを上から評価することができず、解が発散してしまう可能性を排除できない.

例えば、円柱周りの流れについて調べる際には、円柱から流出境界を十分離すことで流入する流れの影響を減らす方法や、流入する箇所境界条件の圧力を全圧に切り替える方法 (ex. [11, 12]) など、このエネルギーの流入に対しての対策は多く調べられている (cf. [9]). しかし、これらの手法は流出部で考えることが一般的であり、冒頭で議論した流入部で考えるには不自然なものになってしまう.

4. 全圧を含む境界条件

4. 1. 全圧を含む境界条件を課したナビエ・ストークス方程式

境界 Γ は2つの互いに素な開部分集合 Γ_1 と Γ_2 と

零集合によって構成されており、 Γ_2 は有限個の $C^{1,1}$ 級の連結成分からなるものとする。全圧を含む境界条件を課したナビエ・ストークス方程式を導入する。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \frac{1}{\rho} p = f & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_1 \times (0, T), \\ u \times n = 0 & \text{on } \Gamma_2 \times (0, T), \\ p + \frac{\rho}{2}|u|^2 = p^b & \text{on } \Gamma_2 \times (0, T), \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (\text{NS}')$$

ここで、このクロス積は \mathbb{R}^d での外積とする²。

通常の圧力 p と流体の単位体積あたりの運動エネルギー $\rho|u|^2/2$ の和 $p + \rho|u|^2/2$ は全圧またはよどみ点圧力と呼ばれる物理量である。つまり、境界 Γ_2 では全圧に関する条件を課していると言える。通常の圧力はこの全圧と区別するために静圧と呼ばれることがある。全圧と静圧は共に実際に計測できるものであり、例えばピトー管を用いて計測される。ピトー管とは細いL字型をしたパイプ状のもので、流れに対して先端が垂直になるように挿入して圧力を計測するものである。全圧と静圧共にピトー管の流れに対するヨー角に影響を受けるのだが、全圧への影響は静圧に対するものより小さく [18, 27]、そういった意味で全圧は静圧より計測しやすいものと言える。

圧力値が与えられており流速は境界に対して垂直となっているようなタイプの境界条件は [2] で提案された。[20] では、ストークス問題とナビエ・ストークス問題に対して様々な境界条件を課した場合について取り扱っている。弱形式を考える際に、同時に取り扱うことが難しい境界条件があるのだが、境界の曲率を用いることで統一的に取り扱っている。その取り扱っている境界条件の1つとして (NS') で課している境界条件も含まれており、 $[0, T]$ 上での大域的な解の存在を証明している。

エネルギー評価と (NS') に対する射影法の導出の前に式変形を行う。

$$(u \cdot \nabla)u = (\nabla \times u) \times u + \frac{1}{2} \nabla |u|^2$$

が成り立つ³ので、 $P = p + \rho|u|^2/2$ とおくと、(NS') は次のように書くことができる

²: 2次元のときは、 $v = (v_x, v_y), w = (w_x, w_y)$ に対して、 $v \times w := v_x w_y - v_y w_x$.

³: 2次元のときは、 $\nabla \times v := \partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y$,
 $(\nabla \times v) \times w := (w_y(\partial v_x / \partial y - \partial v_y / \partial x), w_x(\partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y))$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla \times u) \times u - \nu \Delta u + \frac{1}{\rho} \nabla P = f & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_1 \times (0, T), \\ u \times n = 0 & \text{on } \Gamma_2 \times (0, T), \\ P = p^b & \text{on } \Gamma_2 \times (0, T), \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (\text{NS})$$

以降では簡単のため、 $\nu = \rho = 1$ を仮定する。3章で述べたようにナビエ・ストークス方程式で流入を許す境界条件では、外部からエネルギーが入ってくる場合があるために上からの評価が困難という問題があるが、この境界条件では全圧を考えているおかげでその困難を回避することができる。(NS) に対して、4章と同様にエネルギー評価を行う。(NS) の第1式に流速 u を掛けて積分すると次が得られる。

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla \times u) \times u - \Delta u + P \right) \cdot u dx = \int_{\Omega} f \cdot u dx.$$

ここで、外積をとったものと自身の内積はゼロとなるため、非線形項に対応する項は消える。このことから、 $0 \leq t \leq T$ に対して、

$$\begin{aligned} & \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2 dt \\ & \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + c \int_0^t (\|f\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|p^b\|_{H^1(\Omega)}^2) dt. \end{aligned}$$

が成り立ち、境界での積分が出て来ることはなく、解の $L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$ での有界性を導ける。この議論は提案する射影法スキームの安定性を証明する際にも適用できる。

4. 2. 全圧を含む境界条件を課した射影法

[22] で提案した (NS) に対する射影法は次で与えられる。

Step 1 (viscous prediction): 次を満たす u_k^* を求めよ。

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}(u_k^* - u_{k-1}) + (\nabla \times u_{k-1}^*) \times u_k^* - \Delta u_k^* = f(t_k) & \text{in } \Omega, \\ u_k^* = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ u_k^* \times n = 0, \operatorname{div} u_k^* = 0 & \text{on } \Gamma_2. \end{cases} \quad (4.1)$$

Step 2 (projection): 次を満たす $u_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ および $p_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ。

$$\begin{cases} -\tau \Delta p_k = -\operatorname{div} u_k^* & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial p_k}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ P_k = p^b(t_k) & \text{on } \Gamma_2, \end{cases} \quad (4.2)$$

$$u_k = u_k^* - \tau \nabla p_k \quad \text{in } \Omega. \quad (4.3)$$

Γ_2 上での流速に関する境界条件が見慣れない形ではあるが、(4.1) の第3式は $k = \operatorname{div} n = (d-1) \times (\text{平均曲率})$

を用いて

$$u_k^* \times n = 0, \quad \frac{\partial u_k^*}{\partial n} \cdot n + k u_k^* \cdot n = 0 \quad \text{on } \Gamma_2.$$

と書くことができる [19]. 特に, Γ_2 が平坦な場合に次のように簡単な形となる.

$$u_k^* \times n = 0, \quad \frac{\partial u_k^*}{\partial n} \cdot n = 0 \quad \text{on } \Gamma_2.$$

なお, 流速に対して全周ディリクレ境界を課した場合に, 有限差分法で圧力の数値振動を避けるために全圧を用いた射影法が [6]で提案されている.

4. 3. 弱形式

ナビエ・ストークス問題 (NS) と射影法 (4.1), (4.2), (4.3) の弱形式を定義するために, 次の関数空間

$$H := \{\varphi \in H^1(\Omega)^d \mid \varphi = 0 \text{ on } \Gamma_1, \varphi \times n = 0 \text{ on } \Gamma_2\},$$

$$V := \{\varphi \in H \mid \text{div } \varphi = 0 \text{ in } L^2(\Omega)\},$$

$$H_{\Gamma_2}^1(\Omega) := \{\psi \in H^1(\Omega) \mid \psi = 0 \text{ on } \Gamma_2\},$$

および, 次で定義される双線形形式 $a_0: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, 三重線形形式 $a_1: L^{p_d}(\Omega)^d \times H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ ($p_2 > 2, p_3 = 3$) を準備する. $u \in L^{p_d}, v, w \in H$ に対して,

$$a_0(v, w) := (\text{div } v, \text{div } w) + (\nabla \times v, \nabla \times w),$$

$$a_1(u, v, w) := \int_{\Omega} u \cdot (\nabla \times (v \times w)) dx.$$

ただし, ここで (\cdot, \cdot) はスカラー関数, ベクトル関数または行列関数に対する $L^2(\Omega)$ -内積である. 以降では, f, p^b, u_0 は次を満たすものとする.

$$f \in L^2(0, T; H^*), \quad p^b \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad u_0 \in L^{p_d}(\Omega)^d.$$

ここで, 双線形形式 a_0 は次の命題を満たす.

命題 4.1. 任意の $u \in H^2(\Omega)^d$ と $\varphi \in H$ に対して,

$$-(\Delta u, \varphi) = a_0(u, \varphi) - \int_{\Gamma_2} (\text{div } u) \varphi \cdot nds.$$

命題 4.1 と Gauss の発散定理より, 任意の $u \in H^2(\Omega)^d$, $P \in H^1(\Omega), \varphi \in H$ に対して, $\text{div } u = 0$ ならば,

$$((\nabla \times u) \times u - \Delta u + \nabla P, \varphi)$$

$$= a_0(u, \varphi) + a_1(u, u, \varphi) - (P, \text{div } \varphi) + \int_{\Gamma_2} P \varphi \cdot nds$$

が成り立つ. したがって, ナビエ・ストークス方程式 (NS) の弱形式として次を導入する.

問題 4.2. 次の 3 条件を満たす $(u, P) \in L^2(0, T; H) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))$ を求めよ. (i) $\partial u / \partial t \in L^1(0, T; H^*)$, (ii) $u(0) = u_0$, (iii) ほぼ至る時刻 $t \in (0, T)$ で次が成り立つ.

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi \right\rangle_H + d(u, u, \varphi) + a(u, \varphi) - (P, \text{div } \varphi) \\ = \langle f, \varphi \rangle_H - \int_{\Gamma_2} p^b \varphi \cdot nds \quad \text{for all } \varphi \in H, \\ \text{div } u = 0 \quad \text{in } L^2(\Omega). \end{cases}$$

(4.4)

(4.4) の第 1 式のテスト関数として $\varphi := v \in V$ を代入することで, ほぼ至る時刻 $t \in (0, T)$ で次が成り立つことを導ける.

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle_V + a_0(u, v) + a_1(u, u, v) \\ = \langle f, v \rangle_H - \int_{\Gamma_2} p^b v \cdot nds \quad \text{for all } v \in V. \end{cases}$$

(4.5)

一般にナビエ・ストークス方程式の弱解の存在について考える際には, このようにテスト関数として発散が 0 となるような関数空間の元を選ぶことで流速 $u: (0, T) \rightarrow V$ のみの問題にして, その流速解の可解性を示す [3].

[20] では (4.3) と同値な弱形式に関してガレルキン法を用いて弱解の存在を示している. 圧力解についてはド・ラームの定理を使うことで (超関数としてだが) 存在を示すことができる [5, Section V.1.5].

(NS) の弱形式の導出と同様に, 命題 4.1 より任意の $u \in H^2(\Omega)^d, \varphi \in H$ に対して,

$$\begin{aligned} & ((\nabla \times u) \times u - \Delta u, \varphi) \\ & = a_0(u, \varphi) + a_1(u, u, \varphi) - \int_{\Gamma_2} (\text{div } u) \varphi \cdot nds \end{aligned}$$

が成り立つので, 射影法 (4.1), (4.2), (4.3) の弱形式として次を導入する.

問題 4.3. 各 $k = 1, 2, \dots, N$ に対して, 次の 2 条件を満たす $(u_k^*, P_k, u_k) \in H \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)^d$ を求めよ. (i) $P_k - p^b(t_k) \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega)$, (ii) 任意の $\varphi \in H, \psi \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega)$ に対して,

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau} (u_k^* - u_{k-1}, \varphi) + a_0(u_k^*, \varphi) + a_1(u_{k-1}^*, u_k^*, \varphi) = \langle f(t_k), \varphi \rangle_H \\ \quad \text{for all } \varphi \in H, \\ \tau (\nabla P_k, \nabla \psi) = -(\text{div } u_k^*, \psi) \quad \text{for all } \psi \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega), \\ u_k = u_k^* - \tau \nabla P_k \quad \text{in } L^2(\Omega)^d. \end{cases}$$

(4.6)

この射影法 (4.6) がどのような意味で「射影」になっているかについて述べておく. 任意の $\psi \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega), k = 1, 2, \dots, N$ に対して, (4.6) の第 3 式, 第 2 式と $u_k^* \in H$ から,

$$\begin{aligned} (u_k, \nabla \psi) & = (u_k^* - \tau \nabla P_k, \nabla \psi) \\ & = -(\text{div } u_k^*, \psi) - \tau (\nabla P_k, \nabla \psi) = 0 \end{aligned}$$

となるので, 超関数の意味で $\text{div } u_k = 0$ となることがわかる. さらに, 任意の $\psi \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega)$ に対して, $\langle u_k \cdot$

$n, \psi|_{\Gamma} = (u_k, \nabla \psi) + (\psi, \operatorname{div} u_k) = 0$ を満たすので, $u_k \in U := \{\varphi \in L^2(\Omega)^d \mid \operatorname{div} \varphi = 0 \text{ in } L^2(\Omega), \varphi \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma_1\}$ となるのがわかる. ところで $L^2(\Omega)^d = U \oplus \nabla H_{\Gamma_2}^1(\Omega)$ と直交分解できることが知られている [16]. また, (4.4) の第3式は

$$u_k^* - \tau \nabla p^b(t_k) = u_k + \tau \nabla (P_k - p^b(t_k)).$$

と書けるので, u_k は $u_k^* - \tau \nabla p^b(t_k)$ を空間 U へ射影したものであることがわかる.

4. 4. 安定性と収束性

射影法の流速解 $(u_k^*)_{k=1}^N, (\bar{u}_k)_{k=1}^N$ に対して, $(0, T]$ 上で区分的に定数補間した関数 $\bar{u}_\tau^*, \bar{u}_\tau$ を定義する.

$$\bar{u}_\tau^*(t) := u_k^*, \quad \bar{u}_\tau(t) := u_k \quad \text{for } t \in (t_{k-1}, t_k], k = 1, 2, \dots, N.$$

定理 4.4. ([23]) $M := \|u_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \|f\|_{L^2(H^1)} + \|p^b\|_{L^2(H^1(\Omega))}$ とおく. τ に依存しない定数 $c > 0$ が存在し, 次を満たす.

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_\tau\|_{L^\infty(L^2(\Omega)^d)} + \|\bar{u}_\tau^*\|_{L^\infty(L^2(\Omega)^d)} &\leq cM, \\ \|\bar{u}_\tau^*\|_{L^2(H^1(\Omega)^d)} &\leq cM, \\ \|\bar{u}_\tau - \bar{u}_\tau^*\|_{L^2(L^2(\Omega)^d)} &\leq cM\sqrt{\tau}. \end{aligned}$$

この安定性から (4.5) の意味でのナビエ・ストークス問題の流速解の存在を示すことができ [23, Corollary 2.22], これは [3, 20] の別証を与えている.

定理 4.5. ([23]) 問題 4.2 の解 (u, P) が存在し, 十分滑らかだとする. このとき, τ に依存しない定数 $\tau_0, c > 0$ が存在し, 任意の $0 < \tau < \tau_0$ に対して次を満たす.

$$\begin{aligned} \|u - \bar{u}_\tau\|_{L^\infty(L^2(\Omega)^d)} + \|u - \bar{u}_\tau^*\|_{L^\infty(L^2(\Omega)^d)} &\leq c\sqrt{\tau}, \\ \|u - \bar{u}_\tau^*\|_{L^2(H^1(\Omega)^d)} &\leq c\sqrt{\tau}, \\ \|\bar{u}_\tau - \bar{u}_\tau^*\|_{L^2(L^2(\Omega)^d)} &\leq c\tau. \end{aligned}$$

さらに領域に対して次の仮定、つまり定常ストークス方程式の正則性を課した場合には, Aubin-Nitscheの技巧を応用することでより高いオーダーでの収束を導くことができる.

仮定 4.6. ある定数 $c = c(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2) > 0$ が存在し, 任意の $e \in L^2(\Omega)^d$ に対して, $(w, r) \in H \times L^2(\Omega)$ が

$$\begin{cases} a_0(w, \varphi) - (r, \operatorname{div} \varphi) = (e, \varphi) & \text{for all } \varphi \in H, \\ \operatorname{div} w = 0 & \text{in } L^2(\Omega), \end{cases}$$

を満たすならば, 次が成り立つ.

$$\|w\|_{H^2(\Omega)^d} + \|r\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|e\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

仮定 4.6 は例えば Ω が $C^{2,1}$ 級の場合などに成り立つ.

定理 4.7. ([23]) 問題 4.2 の解 (u, P) が存在し, 十分滑らかだとする. 仮定 4.6 の下で, τ に依存しない定数 $\tau_1, c > 0$ が存在し次を満たす.

$$\begin{aligned} \|u - \bar{u}_\tau\|_{L^2(L^2(\Omega)^d)} + \|u - \bar{u}_\tau^*\|_{L^2(L^2(\Omega)^d)} &\leq c\tau, \\ \|P - \bar{P}_\tau\|_{L^2(L^2(\Omega))} &\leq c\sqrt{\tau}. \end{aligned}$$

5. まとめ

本稿では, 圧力境界条件を含む射影法に関する近年の研究についての報告と著者の提案した射影法に対する新たな全圧を含む境界条件 (4.1), (4.2) の紹介を行なった. 提案スキームは流出条件 $u \cdot n \geq 0$ などの仮定を課さずとも安定であり(定理 4.4), 定理 4.5, 4.7 より流速に対して全周ディリクレ境界条件を課した射影法 (2.2), (2.3) と同じ誤差評価 [28, 29]が得られることが示された. [23] ではFreeFEMを用いた数値計算も行なっている.

射影法は現在も発展しており, より高い収束オーダーを得られる手法が提案されている [15]. 今後は, 提案した境界条件がそれらの手法に対しても適用可能か, さらに特性曲線法や粒子法などラグランジュ座標系を用いる数値計算手法にも適用可能かについて研究を進めていく.

参考文献

- (1) E. Bänsch, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 279, 198–211 (2014).
- (2) C. Begue, C. Conca, F. Murat, O. Pironneau, *C. R. Acad. Sc. Paris, Serie I* 304, 23–28 (1987).
- (3) J. M. Bernard, *Nonlinear Anal.: Real* 4(5), 805–839 (2003).
- (4) A. Bonito, J.-L. Guermond, S. Lee, *Modified Pressure-Correction Projection Methods: Open Boundary and Variable Time Stepping*. In: Abdulle, A., Deparis, S., Kressner, D., Nobile, F., Picasso, M. (eds) *Numerical Mathematics and Advanced Applications - ENUMATH 2013. Lecture Notes in Computational Science and Engineering* 103. Springer (2015).
- (5) F. Boyer, P. Fabrie, *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier–Stokes equations and related models*, Springer-Verlag (2013).
- (6) J. R. Cho, *J. Mech. Sci. Tech.* 30(7), 3159–3164 (2016).
- (7) A. J. Chorin, *Math. Comput.* 22(104), 745–762 (1968).
- (8) C. Conca, F. Murat, O. Pironneau, *Jpn. J. Math.* 20(2), 279–318 (1994).
- (9) J. Craske, M. van Reeuwijk, *Comput. Fluids* 86, 284–297 (2013).
- (10) J. Deteix, D. Yakoubi, *Appl. Math. Lett.* 79, 111–117 (2018).
- (11) S. Dong, G.E. Karniadakis, C. Chrysosostomidis, *J. Comput. Phys.* 261, 83–105 (2014).

- (12) S. Dong, J. Shen, *J. Comput. Phys.* 291, 254–278 (2015).
- (13) J. Fouchet-Incaux, *SeMA* 64, 1–40 (2014).
- (14) J.-L. Guermond, P. Mineev, J. Shen, *SIAM J. Numer. Anal.* 43(1), 239–258 (2005).
- (15) J.-L. Guermond, P. Mineev, J. Shen, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 195, 6011–6045 (2006).
- (16) J.-L. Guermond, L. Quartapelle, *Numer. Math.* 80, 207–238 (1998).
- (17) F. H. Harlow, J. E. Welch, *Phys. Fluids* 8, 2182–2189 (1965).
- (18) J. P. Holman, *Experimental Methods for Engineers*, 7 edn, McGraw-Hill (2001).
- (19) U. Kangro, R. Nicolaides, *Math. Modelling Numer. Anal.* 33(3), 479–492 (1999).
- (20) T. Kim, D. Cao, *Nonlinear Anal.* 113, 94–114 (2015).
- (21) S. Lee, A. J. Salgado, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 309, 307–324 (2016).
- (22) J. Liu, *J. Comput. Phys.* 228, 7250–7267 (2009).
- (23) K. Matsui, *Numer. Math.* 152, 663–699 (2022).
- (24) D. R. Q. Pacheco, R. Schussnig, T.-P. Fries, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 382, 113888 (2021).
- (25) L. Plasman, J. Deteix, D. Yakoubi, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 92, 1845–1865 (2020).
- (26) A. Poux, S. Glockner, M. Azañez, *J. Comput. Phys.* 230, 4011–4027 (2011).
- (27) E. Rathakrishnan, *Instrumentation, Measurements, and Experiments in Fluids*, 2 edn, CRC Press (2017).
- (28) J. Shen, *SIAM J. Numer. Anal.* 29(1), 57–77 (1992).
- (29) J. Shen, *Numer. Math.* 67(4), 513–520 (1994).
- (30) Z. Sheng, M. Thiriet, F. Hecht, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 73, 58–73 (2013).
- (31) R. Temam, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 33(5), 377–385 (1969).
- (32) J. E. Welch, F. H. Harlow, J. P. Shannon, B. J. Daly, *Technical Report LA-3425*, Los Alamos National Laboratory (1966). Errata (1968).