

## 曲面の分類定理の ZIP 証明とその安定写像への応用について

鴻巣 ゆう, 高瀬 将道<sup>\*1</sup>

### On the ZIP proof of the classification theorem of closed surfaces and its application to stable maps

Yu KONOSU, Masamichi TAKASE<sup>\*1</sup>

**ABSTRACT** : The aim of this article, based on the master's thesis [13] written by the first-named author, is two-fold: to provide a detailed account in Japanese of Conway's ZIP proof of the classification theorem of closed surfaces and to discuss its application to a study of stable maps. For the former purpose, we heavily rely upon the survey article [1] by George K. Francis and Jeffrey R. Weeks. The latter enables us to explicitly construct a stable map from a closed surface to the plane with any number of cusp points satisfying the Whitney-Thom congruence formula.

**Keywords** : surface, classification theorem, ZIP proof, stable map, cusp

(Received August 21, 2011)

#### 1. はじめに

この記事は第一著者による修士論文[13]を下敷きとしていることをはじめに注意しておく。

トポロジーの基本問題の一つは多様体を(微分)同相のもとで完全に分類することである。本文では2次元コンパクト閉多様体, すなわち閉曲面の分類問題を扱う。閉曲面の同相に関する分類定理は古くから知られており, その証明には多くのバリエーションがある。現在最も広く知られているのは, 曲面を多角形の等化図にまで切り開く方法[11, 5]で, 基本的にSeifert-Threlfall [11]を踏襲するものである。Seifert-Threlfallの証明は構成的で理解しやすいものであるが, 与えられた曲面を幾分人工的な標準形まで整形しなければいけないという欠点がある。この欠点を克服するものとして, 1992年頃にJohn H. ConwayはZIP証明(ZIP proof)と呼ばれる完全に新しい証明を考案した。ZIP証明は初等的でありながら無駄がなく, 広く従来の証明に取って代わる可能性を持つものである。しかしながら, 現在ZIP証明について解説した文献は, FrancisとWeeksによる解説記事[1]の他に殆どなく, 特に日本語による解説は著者の知る限り皆無である。この文章の第

一の目的は, ConwayのZIP証明をFrancisとWeeksによる解説記事[1]に基づいて解説することである。

曲面の分類定理のSeifert-Threlfallの証明におけるポイントは与えられた曲面を多角形にまで切り開くところにあるが, この多角形の代わりにZIP証明に登場するのはそれぞれに穴がいくつか開けられた球面の集まりである。したがって, これらの「穴」の塞ぎ方の考察から自然に到達する「通常(ordinary)」という概念の導入が, ZIP証明における一つのキーになっている。また証明の記述には多くの工夫があり, 「zip対」の概念や「クロスハンドル」の導入もその中に含まれる。この文章の第二の目的は, このクロスハンドルの導入に着目して, ZIP証明の議論を安定写像の理論に結び付けることである。

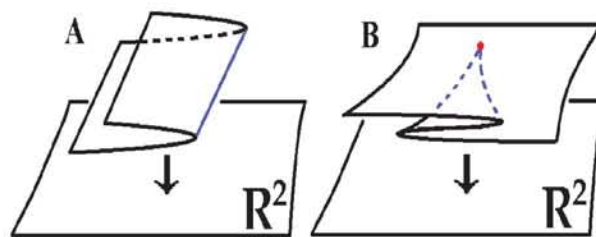


図0 折り目特異点とカスプ特異点

<sup>\*1</sup> : 共通基礎准教授 (mtakase@st.seikei.ac.jp)

具体的には, 以下のWhitney-Thomの合同式の合同を実

現する最小個数のカusp特異点を持つ安定写像の、具体的記述を与えた (定理 3.5) :

**Whitney-Thom** の合同式.  $M^2$  を閉曲面とする. このとき, 任意の安定写像  $f: M^2 \rightarrow R^2$  に対して,

$$\chi(M^2) \equiv \#C(f) \pmod{2}$$

が成り立つ. ここで  $\#C(f)$  はカusp特異点の個数を表す.

さらに定理 3.5 で得られた構成の系として以下の事実を, やはり写像を具体的に記述することにより, 証明した (系 3.7).

- (イ) 任意の種数の向き付け可能閉曲面から, 任意に与えた (非負) 偶数個のカusp特異点を持つ安定写像を構成することができる.
- (ロ) 任意の偶数種数の向き付け不可能閉曲面から, 任意に与えた (非負) 偶数個のカusp特異点を持つ安定写像を構成することができる.
- (ハ) 任意の奇数種数の向き付け不可能閉曲面から, 任意に与えた (非負) 奇数個のカusp特異点を持つ安定写像を構成することができる.

## 2. ConwayのZIP証明

曲面は数学の様々な分野に自然に登場する重要な対象である. 曲面の分類は 1860 年代には既になされていて, 全ての閉曲面は, 球面にいくつかのハンドル, もしくはいくつかのクロスキャップを接着したものに位相的に同値 (同相) であることが知られている. この分類定理について, 現在のほとんどの教科書は Seifert-Threlfall [11] に従った証明を採用している. この証明は構成的ではあるが, 与えられた曲面を標準形まで整形する必要がある.

この節では 1992 年頃に Conway が見出した, ZIP証明 (ZIP proof) と呼ばれる新しい証明を紹介する. ZIP証明は Seifert-Threlfall の証明の構成的な特徴を残したまま, 標準形という欠陥 (irrelevancy) を回避するものである. Conway はこれを Zero Irrelevancy Proof (無欠陥証明) あるいは, 「ZIP証明」と呼ぶように要請しているそうである. これは, そうしておかないと「一見すると自明な証明と思われてその起源が失われるという危険がある」ということである.

この節の中身はほぼ忠実に [1] を元にしていて, 説明が分かりにくい部分などについては独自に補完した. また説明に用いるすべての図は第一著者が描いたものである. 但し, [1] に描かれている図もすべて素晴らしいものであり, 是非どちらも同時に参照してほしい.

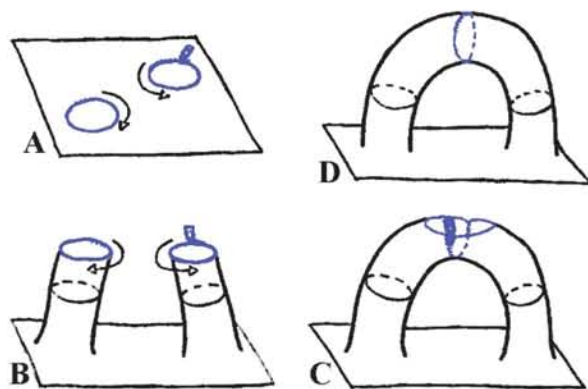


図1 ハンドル

さて, トポロジーの世界では曲面を自由にのぼしたり変形したりすることができる. 例えば球面と楕円面は, 一方から他方へ滑らかに変形できるので同じもの (同相である) とみなすわけである. 一方, 球面とトーラスはこのような変形が不可能なのでトポロジーとして異なる (同相でない) ものである. これから多くの図が登場するが, それらはすべてこのような曲面の変形を表すものである. 例えば, 図 1A の 2 つ穴のあいた四角形は, その四角形に 2 つのチューブがついたもの (図 1B) へと変形ができるから同相である. より一般的に述べると, 2 つの曲面が同相であるとは, 一方から他方への (両方向の) 連続かつ全単射な写像があることである. 同相は, 連続な変形によって移り合えるかどうかを測る重要な同値関係である.

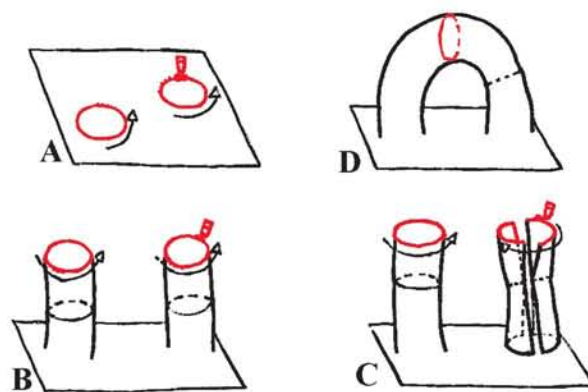


図2 クロスハンドル

曲面に現れうる特徴的な形状を「zipper」——あるいは zipper の片側を zip と呼ぶことにすれば「zip対」——の概念を使って説明してみよう. 例えば, 図 1A の四角形には 2 つの穴が開いていて, それぞれの穴には (青く描かれた) zip が付いている. この zip がついた部分を引っ張って zip を閉じると, ハンドル (handle) 付きの曲面 (図 1D)

が得られる。いま一方のzipの向きを逆にしてみる（図2A）。（赤く描かれた）2つのzipを閉じる際、zipの向きを合わせようとする、チューブの一部が図2Cのようにチューブ自身を貫通しなければならない。図2Cでは、見易さのために、自身を貫通するチューブに縦の切れ込みが入れているが、図2Cのようにしておいてからzipを閉じていくと、クロスハンドル（crosshandle）というものが得られる（図2D）。図2Dは自身を貫通するクロスハンドルを描いている。チューブが自身を貫通する部分（自己交叉）は、図2Dで黒い点線で示された線分である。自己交叉は曲面を3次元空間内に描くときには特徴的で目を引く部分であるが、曲面自体のトポロジーにとっては本質的な特徴ではない。

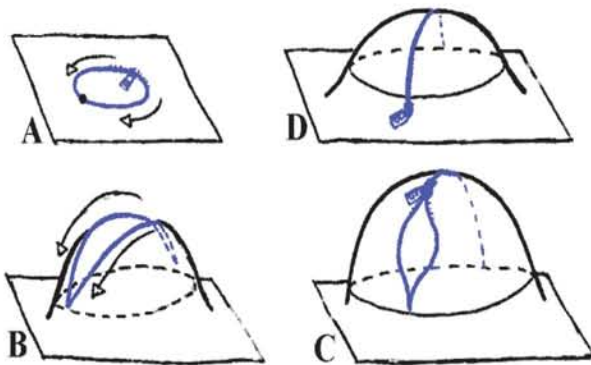


図3 キャップ

もし図3Aのようにある1つの円周に、半周ずつzipがついていて、尚且つそれらの向きがうまく揃っていたら、それらを閉じるとキャップ（cap）ができる（図3C）。これはトポロジー的にはあまり意味がないものである（図3D）。2つの半周ずつのzipの向きがあべこべになっている場合（図4A）はもっと面白いことになる。曲面を変形して、2つの（赤い）zipが向きを揃えて向かい合うようにしてから（図4B）、zipを閉めていく（図4C）。閉じる部分が頂上に達し、そこからは下向きに「残った2つの辺」を閉じていくとき（図4C）、曲面が自身と交叉する部分が生じていく。前と同様に、この自己交叉は曲面を3次元空間内に描いてみせようとする生ずるものであって、曲面自体の内在的なトポロジーには無関係である。このようにしてできるのがクロスキャップ（crosscap）である。図4Dでは自己交叉を分かり易くするために、上下に分離して描いてある。

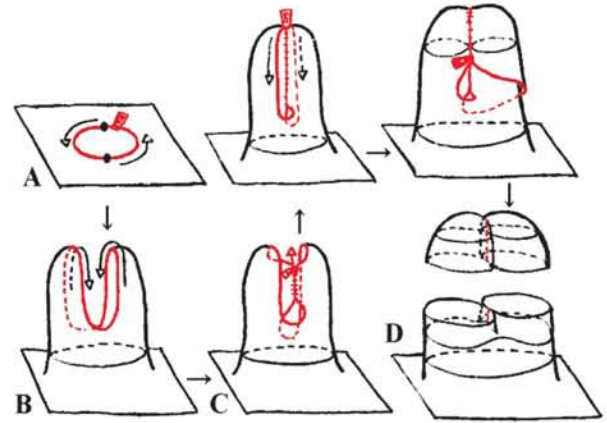


図4 クロスキャップ

以上の説明を見れば、曲面がどのようなものであるか非専門家にも理解できるはずである。ここで、いくつか専門的な注意をしておく。まず、今後扱う曲面はコンパクトであって、境界は持っていないこととする。また、曲面が連結であることは仮定しない。

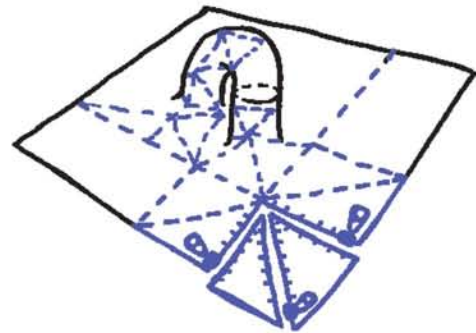


図5 三角形分割

さらに、曲面は三角形分割されているものと仮定する。図5は三角形分割された曲面の例である。三角形分割された曲面を理解するには、キルトのパッチワークを、但し伝統的な四角形のパッチではなく、小さな三角形のパッチが図5のようなzip対で縫い合わされたようなものを想像すればよい。すべての曲面は三角形分割可能であるが、その証明は複雑である[10]。そこで我々は、分類定理はすでに三角形分割されている曲面に関する主張であると考え、三角形分割された曲面のみを扱うことにすることにするのである。

**定義 2.1.** 曲面から開円盤を取り除いたもの、または乗り除くことを穿孔（perforation）という。例えば、図1Aは2つの穿孔が施された曲面の一部である。

**定義 2.2.** ある曲面が通常（ordinary）であるとは、それ

が有限個の球面にハンドルの接着，クロスキャップの接着，クロスハンドルの接着，または穿孔を各々有限回施したものに同相であることをいう。

**定理 2.3** (準備版分類定理). 全ての曲面は通常である。

**証明.** 三角形分割された任意の曲面を考える。つまり，前述のようにzip付きの小さな三角形のパッチが図5のようにzip対で縫い合わされたようなものを考える。

全てのzip対を開き，曲面を縁にzipが付いた三角形にまでバラバラにする。こうすると，各三角形は球面に一回穿孔を施したものに同相であるから，この三角形の集まりからなる曲面は通常である。さて，あるzipを元々ペアであったzipと閉じ直してみる。こうしてできる曲面は，次に示す補題 2.4 によって，通常である。さらに，一度に1対ずつzipを元通りに閉じ直していくことを続けていくと，各段階で補題 2.4 を適用することにより，やはりできる曲面は通常である。最後のzip対が閉じられると，最初の曲面が復元され，やはりこれは通常であることが分かる。■

**補題 2.4.** ある曲面の境界部分に2つのzipが付けられているとする。もし元の曲面が通常ならば，その2つのzipを閉じることによってできる曲面も通常である。

**証明.** まず2つのzipの各々が境界に含まれるある円周全体を占めている場合を考える。もしこれらの2つの円周が曲面の同じ連結成分に含まれているなら，これらの円周がお互いに近づくように曲面を変形させていきzipを閉じることによって，2つの円周はそれらの向きに応じてハンドル(図1)もしくはクロスハンドル(図2)のいずれかを構成することになる。つまり，新しくできる曲面は元の曲面にハンドルまたはクロスハンドルを接着したものであるから，当然通常である。

2つのzipの各々が境界に含まれるある円周全体を占めているが，それらの円周が曲面の異なる連結成分上にあるときは，2つのzipを閉じ合わせると2つの連結成分が連結される。片方のzipを伸ばしてチューブ状にし，他方のzipと閉じる際，zipの向きによってはチューブが曲面と交叉してしまうことがあるが，前と同様にこうやって生じる自己交叉は曲面自体の本質的なトポロジーとは無関係なのである。すなわち起こることは元の通常の曲面を構成する球面の数が一つ減るということだけである。したがって得られる曲面は通常である。

次に2つのzipが2つ合わせてある1つの円周全体を共

有している場合を考える。これらのzipを閉じると，それらの相対的な向きに応じてキャップ(図3)もしくはクロスキャップ(図4)のいずれかができる。この場合もやはり得られる曲面は通常である。

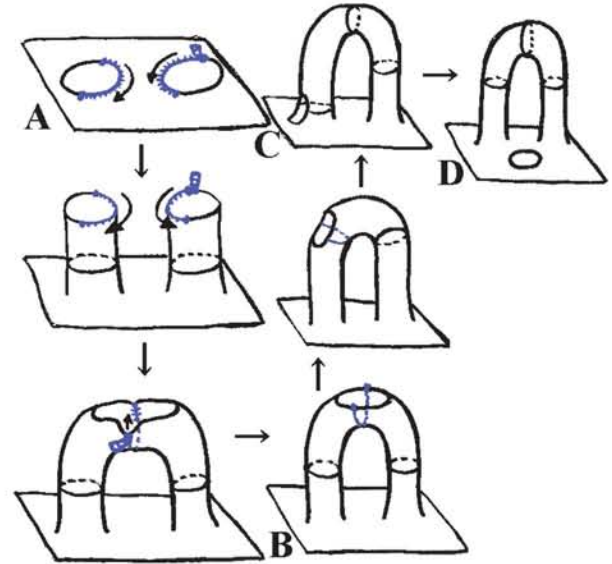


図6 穿孔付きハンドル

最後に2つのzipが円周を完全に閉めておらず，なんらかの隙間が残っている場合を考えよう。一つの例として，図6Aの(青い)zipを閉じると，2つの穿孔は頂上の部分に穴が一つ開いたハンドル(図6B)に変形され，さらにこの穴はハンドルから離れたところまで滑らせていくことができる(図6C, 図6D)。2つzipがある円周全体を占めていない場合，一般には以下のように考えればよい。まず，これらの2つのzipは元の大きさを保っていて，他のところにあるzipたちは眼鏡を書けないと見えにくいくらいに小さく縮んでいると想像してみる。こうすると(眼鏡をはずしたままであれば)我々は2つのzipが円周を完全に占めている場合と同様に変形を思い浮かべることができる。つまり，円周を閉じることによって，図1から図4に図示されているような「ハンドル」，「クロスハンドル」，「キャップ」，「クロスキャップ」が得られる。はずしていた眼鏡を再びかければ，曲面上に小さな穿孔があることに気付くであろうが，この曲面は明らかに通常である。■

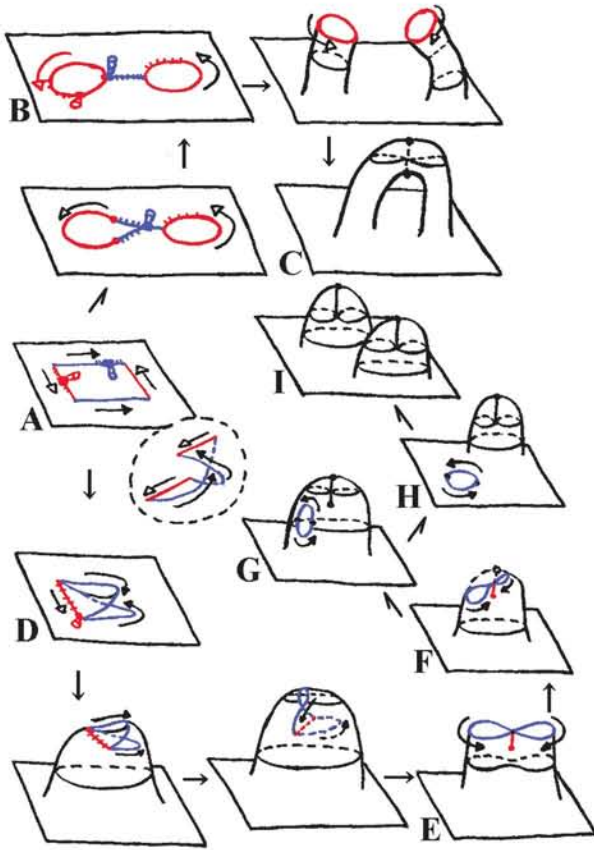


図7 クロスハンドル1つはクロスキャップ2つと同相

続く2つの補題はハンドルとクロスハンドルとクロスキャップの関係を説明している。

**補題 2.5.** クロスハンドル1つはクロスキャップ2つと同相である。

**証明.** 図7Aのような「Klein穿孔 (Klein perforation)」を持つ曲面を考える。いま、図7Aにおいて平行で同じ方を向いている黒い矢印が付いた(青い)2つのzip同士をまず閉じた場合、穿孔は2つの穿孔に分かれ(図7B)、さらに残った2つのzipを閉めるとクロスハンドルができる(図7C)。一方、図7Aにおいて平行で逆の方を向いている白い矢印が付いた2つの(赤い)zipを先に閉めた場合には、「メビウスの橋(図7D)」を伴う穿孔が得られる(図7D)。その境界部分を一定の高さまで持ち上げると、曲面の一部はそれより下に回り込む形になって、クロスキャップの下半分が作られる(図7E)。いま仮にクロスキャップの上半部分を「見えない円盤」によって蓋をしておく(図7F)、この円盤をクロスキャップの自己交叉の線から離れるように滑らせていくことができる(図7G)。こうしておいてこの仮の円盤を取り除く。この穿

孔を滑らせてクロスキャップからはずし(図7H)、穿孔の周囲に残っている(赤い)zip対を閉じるとさらにもう一つのクロスキャップができる(図7I)。

曲面の内在的なトポロジーは、矢印が黒と白の(赤と青の)どちらのzipを先に閉じるかによらないはずなので、クロスハンドル1つ(図7C)はクロスキャップ2つ(図7I)に同相であることが分かる。■

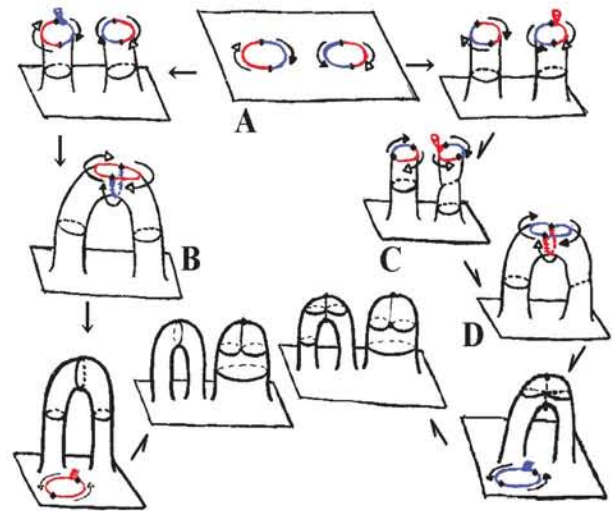


図8 ハンドルとクロスハンドルの入れ替え

**補題 2.6 (Dyckの定理[7]).** クロスキャップを少なくとも1つ含む曲面上では、ハンドルとクロスハンドルは相互に入れ替えることができる。

**証明.** 図8Aのようにzipが付けられた2つの穿孔を考える。いま黒い矢印が付いた(青い)zip対を先に閉じると(図8B)、穿孔を持つハンドルができる。この穿孔には閉じるとクロスキャップができるような向きを持つ(赤い)zip対が付いている。逆にもし、片側のチューブを自己交叉させておくことによって(図8C、また図2C)、白い矢印が付いた(赤い)zip対を先に閉じると、今度は穿孔を持つクロスハンドルを得る(図8D)。この穿孔には閉じるとクロスキャップができるような向きを持つ(青い)zip対が付いている。どちらの場合も穿孔をハンドルまたはクロスハンドルから離れたところまで滑らせていくことができる。これは図6BCDで穿孔を滑らせてハンドルから分離できたのとまったく同様である。以上により、クロスキャップ付きハンドルとクロスキャップ付きクロスハンドルは同相である。■

**定理 2.7 (分類定理).** 任意の連結な閉曲面は、いくつかのクロスキャップが接着された球面か、いくつかのハンド

ルが接着された球面のどちらかに同相である。

証明. 定理 2.3 (準備版分類定理) より, 連結な閉曲面はハンドル, クロスハンドル, クロスキャップがいくつか接着された球面と同相である。

場合 1: クロスハンドルまたはクロスキャップが少なくとも 1 つあるとする。補題 2.5 より各クロスハンドルは 2 つのクロスキャップと同相であるから, このような曲面は全体としてクロスキャップとハンドルだけが接着された (つまりクロスハンドルを持たない) 球面と同相である。いまクロスキャップが少なくとも 1 つあるので, 補題 2.6 によって各ハンドルはクロスハンドルと入れ替えられ, さらにクロスハンドルはクロスキャップ 2 つと同値であるから (補題 2.5), 結果として, 曲面はいくつかのクロスキャップのみが接着された球面に同相であるが分かる。

場合 2: 曲面にはクロスハンドルとクロスキャップのどちらも接着されていないとする。このとき曲面はハンドルのみが接着された球面に同相である。

以上によって, 任意の連結な閉曲面はいくつかのクロスキャップが接着された球面か, いくつかのハンドルが接着された球面のどちらかに同相である。■

注. 定理 2.7 (分類定理) に登場するすべての曲面はお互いに同相ではない。このことはそれらの向き付け可能性とオイラー数によって区別できる。すなわち,  $g$  個のハンドルが接着された球面は向き付け可能であり, そのオイラー数は  $2-2g$  である。また,  $g$  個のクロスキャップが接着された球面は向き付け不可能であり, そのオイラー数は  $2-2g$  である。多くのトポロジーの教科書 (例えば [6,8,12]) に詳しい解説がある。

注. 通常,  $g$  個のハンドルが接着された球面のことを種数 (genus)  $g$  の向き付け可能閉曲面と呼び,  $g$  個のクロスキャップが接着された球面のことを種数 (genus)  $g$  の向き付け不可能閉曲面と呼ぶ。曲面の呼び方の慣例については次にも注意がある。

曲面の名前について. ハンドルが 1 つ接着された球面を トーラス (torus) と呼び, ハンドルが 2 つ接着された球面を ダブルトーラス (double torus), 3 つだと トリプルトーラス (triple torus) と以下同様に呼ぶ。クロスキャップが 1 つ接着された球面は伝統的に 実射影平面 (real projective plane) と呼ばれている。この名前はアフィン構造を考慮する射影幾何学に由来していて, 単にそのトポ

ロジーのみに着目している場合にはあまり適切な名前ではない。そこで Conway はクロスキャップが 1 つ接着された球面を クロス曲面 (cross surface) と呼ぶことを提案しているようである。クロス曲面という名前はクロスキャップのことだけでなく, 球面の対蹠点の同一視という別の美しい構成法を思い起こさせるものでもある。このようにすれば, クロスキャップが 2 つ接着された球面は ダブルクロス曲面 (double cross surface), クロスキャップ 3 つの場合は トリプルクロス曲面 (triple cross surface), 以下同様に呼ぶことができる。但し, 例外的にダブルクロス曲面はしばしば Klein の壺 (Klein bottle) と呼ばれ, トリプルクロス曲面は Dyck の曲面 (Dyck's surface) [9] と呼ばれることが多い。

### 3. 安定写像への応用

ここからは, ZIP 証明の中で導入されたクロスハンドルに着目し, 安定写像の理論への応用を考える。具体的に言えば, 閉曲面からの平面  $\mathbf{R}^2$  への安定写像に対する Whitney-Thom の合同式の合同を実現する最小個数のカスプ特異点を持つ安定写像を具体的に記述することが目的である。

#### 3.1 安定写像

はじめに安定写像について説明する。定義等に関しては [6] と [4] を参照した。

さて,  $M^n$  と  $N^p$  をそれぞれ  $n$  次元,  $p$  次元の多様体とする。 $M^n$  から  $N^p$  への  $C^\infty$  級写像空間全体の集合を  $C^\infty(M^n, N^p)$  とおく。 $C^\infty(M^n, N^p)$  には Whitney 位相 (Whitney  $C^\infty$ -topology) と呼ばれる位相を導入することができ, この位相空間  $C^\infty(M^n, N^p)$  を 写像空間 という。Whitney 位相の正確な定義は文献 [4] に委ねることにするが, 大まかに言えば, コンパクト集合の上での 2 つの写像の無限階までの偏微係数が近いときに, それら 2 つの写像は近いと定めるような位相である。

次に安定写像を定義する。まず,  $C^\infty(M^n, N^p)$  内の 2 つの写像  $f$  と  $g$  が 同値である とは, 適当に選んだ 2 つの微分同相写像  $h: M^n \rightarrow M^n$  と  $H: N^p \rightarrow N^p$  に対して

$$f = H^{-1} \circ g \circ h$$

が成り立つことをいう。また 2 つの写像  $f$  と  $g$  が同値であることを  $f \sim g$  と表す。次が安定写像の定義である。

定義 3.2 (安定写像). 写像空間  $C^\infty(M^n, N^p)$  内の写像  $f$  が安定 (stable) であるとは, 集合

$$U_f = \{ g \in C^\infty(M^n, N^p) \mid f \sim g \}$$

が開集合となることである。

上の定義において集合  $U_i$  が  $C^\infty(M^m, N^p)$  の開集合であるということは、安定写像  $f$  が写像の近くには偏微係数が近い写像（すなわち、特異点のタイプがほとんど変化しない写像）しかないことを意味している。つまり、安定写像  $f$  は、それを写像空間の中で少しぐらい動かしても写像の性質が著しく変化することがない「安定した」写像なのである。

また、我々が注目する  $n = p = 2$  の場合、安定写像全体の集合は写像空間の中で稠密である。つまり曲面から平面への任意の  $C^\infty$  級写像はいつでも安定写像によって近似できるのである。

### 3.2 曲面から平面への安定写像の安定写像

前節を見れば分かるように安定写像の一般的な定義は多少難解である。しかしながら我々が扱う曲面から平面への安定写像は、そこに現れる特異点の言葉による局所的な条件（と多少の大域的条件）によって特徴づけることもできる。以下にこれを説明する。

一般に安定写像には、次元対ごとに決まった型の特異点しか現れないことが知られており、このような特異点は安定特異点と呼ばれる。曲面から平面への安定写像の場合は次のようになる。

**命題 3.2.** 曲面から平面への安定写像に現れる特異点は、定義域と値域の局所座標を適当に選ぶことにより、次のいずれかのように記述できる：

- (1)  $(x, y) \mapsto (x, y^2)$
- (2)  $(x, y) \mapsto (x, y^3 - xy)$ .

局所的に上の(1)の形で書くことができる特異点を折り目特異点 (fold singularity) と呼び、(2)の形で書くことができる特異点をカスプ特異点 (cusp singularity) と呼ぶ。つまり曲面から平面への写像の場合は折り目特異点とカスプ特異点のみが安定特異点ということになる。折り目特異点とカスプ特異点の周囲の様子はこの記事の始めのページにある図0に描かれている。図0Aの「紙の折り目」になっている（青い）実線部分には折り目特異点が並んでいて、図0Bで「ひだ」の尖点になっている（赤い）点がかスプ特異点である。ちなみに、図0Bの（青い）点線部分は折り目特異点になっている。折り目特異点もカスプ特異点も、ともにヤコビ行列の階数が1になる点である。折り目特異点全体の集合を  $F(f)$  で、カスプ特異点全体の集合を  $C(f)$  で表すことにすると、 $F(f)$  は1次元、 $C(f)$  は0次元集合になることが容易に分かる。

さて、曲面から平面への  $C^\infty$  級写像の場合はそこに現れる特異点が折り目特異点とカスプ特異点のみであるという条件に加えて、以下の大域的な条件を充たすものを安定写像と考えることもできる：

- (1) 制限写像  $f|_{F(f)}: F(f) \rightarrow \mathbf{R}^2$  は高々二重点しか持たないはめ込みであり、二重点は横断的に交わる。言い換えると、二重点における像は局所的に（すなわち  $\mathbf{R}^2$  の局所座標  $(X, Y)$  をうまく選べば）
 
$$\{(X, Y) \in \mathbf{R}^2 \mid XY=0\}$$
 の形をしている。
- (2) 折り目特異点とカスプ特異点は  $f$  によって交わらない。つまり、 $f(F(f)) \cap f(C(f)) = \emptyset$  である。
- (3) カスプ特異点  $p$  同士は  $f$  によって交わらない。つまり、 $p \neq q \in C(f)$  に対して  $f(p) \neq f(q)$  である。

いずれにせよ、曲面から平面への安定写像に現れる孤立特異点はカスプ特異点のみであるということになるが、このカスプ特異点の個数については次に述べる Whitney-Thom の合同式が重要である。Whitney-Thom の合同式は、閉曲面から平面への安定写像に現れるカスプ特異点の個数の偶奇は定義域の閉曲面のトポロジーの性質だけで決定され、安定写像の選び方には依らないということを主張している。

**定理 3.4 (Whitney-Thom の合同式).**  $M^2$  を閉曲面とする。任意の安定写像  $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  に対して、

$$\chi(M^2) \equiv \#C(f) \pmod{2}$$

が成り立つ。但し、 $\#C(f)$  はカスプ特異点の個数を表す。

### 3.3 いくつかの写像の具体的構成

適当な閉曲面を1つ固定して考えると、上で述べた Whitney-Thom の合同式は、その閉曲面から平面への安定写像に現れるカスプ特異点の個数が取りうる値を制限するものと思えることができる。実はその評価は「最良」である。我々はこのことを、いくつかの写像を以下に述べるやり方で具体的に構成することによって、証明する。

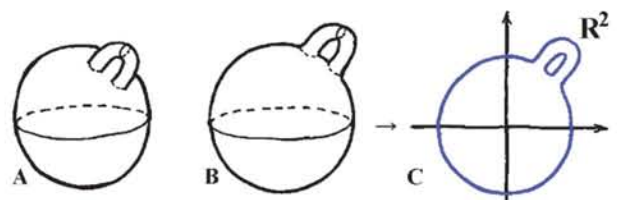


図9 ハンドル付き球面からの安定写像

**定理 3.5.**

- (イ) 任意の種数の向き付け可能閉曲面から  $\mathbf{R}^2$  への、カスプ特異点のない安定写像が構成できる。
- (ロ) 任意の偶数種数の向き付け不可能閉曲面から  $\mathbf{R}^2$  への、カスプ特異点のない安定写像が構成できる。
- (ハ) 任意の奇数種数の向き付け不可能閉曲面から  $\mathbf{R}^2$  への、ちょうど 1 個のカスプ特異点を持つ安定写像が構成できる。

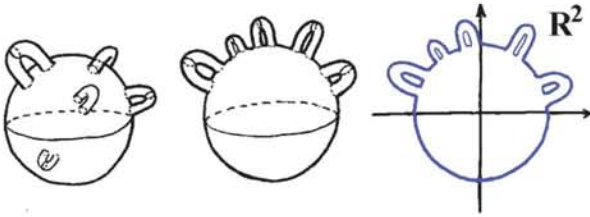


図 10 任意の向き付け可能曲面からの安定写像

証明. (イ) 分類定理より、任意の種数の向き付け可能閉曲面は、球面に適当な数のハンドルを接着したものに同相である。まず、ハンドルが 1 つだけ接着されている場合を考える (図 9A)。図 9B のように球面の「端」にハンドルを移動し、そのまま「自然に」 $\mathbf{R}^2$  へつぶすように写像  $f$  を作る (図 9C)。こうしてできた写像  $f$  は図 9C の (青い) 実線部分に折り目特異点を持ち、その他の点の近傍では局所的な埋め込みとなっている。従って、この写像  $f$  はカスプ特異点を持たない安定写像である。同様にハンドルが任意個接着されている場合でも、ハンドルをうまく移動させればカスプ特異点を持たない安定写像を構成することができる (図 10)。

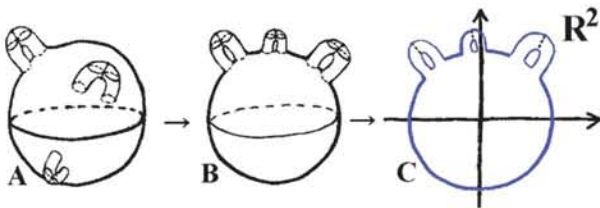


図 11 偶数種数の向き付け不可能曲面からの安定写像

(ロ) 任意の偶数種数の向き付け不可能閉曲面は、球面に偶数個のクロスキャップを接着したものに同相である。補題 2.5 より、2 つのクロスキャップは 1 つのクロスハンドルと同相であるから、この閉曲面はいくつかのクロスハンドルが接着された球面に同相である。従って、(イ) のハンドルをつぶした方法と似たやり方で、図 11 のように写像  $f$  を構成すれば、この  $f$  は折り目特異点のみ

を持つ安定写像である。3 次元空間内にあるクロスハンドルを平面に射影するとき、クロスハンドルの自己交叉が平面上で折れ曲がったりしないように射影すれば、カスプ特異点は出現しないことに注意する。図 11B の中に描かれた点線部分は特異点ではないのである。

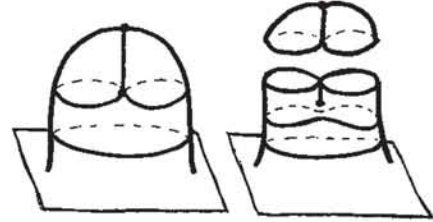


図 12 クロスキャップの上部と下部

(ハ) 任意の奇数種数の向き付け不可能閉曲面は、球面に奇数個のクロスキャップを接着したものである。補題 2.5 を使うとクロスキャップを 1 つ残して、他のクロスキャップを 2 個ずつの対でクロスハンドルへ入れ替えてしまうことができる。クロスハンドルの部分では (ロ) で示したようなやり方で、カスプ特異点を持たない安定写像が構成できるので、クロスキャップの部分だけを考えよう。

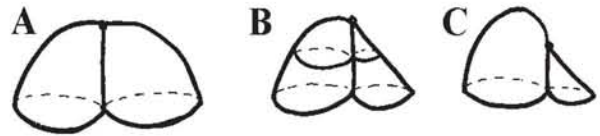


図 13 クロスキャップの上部の変形

まずクロスキャップを以下のように変形する。分かり易くするために、クロスキャップを図 12 のように上部と下部に切って変形を説明していく。上部は通常 Whitney の傘 (Whitney umbrella) と呼ばれるが、この Whitney の傘 (図 13A) を、まず自己交叉のある部分から片側を縮めていき (図 13B)、最終的に図 13C のようになるまで変形する。

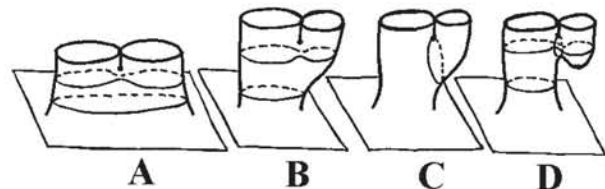


図 14 クロスキャップの下部の変形

また下部 (図 14A) の切り口部分は 8 の字を描いていて、底の方は 1 本の円周になっている。図 14B 下の円周



は小さくしておき、図 14Cに描かれている縦の円周をゴムで絞るように縮ませていく。そうすると、このゴムより右側の下の部分は少し垂れ下がっているような感じになる (図 14D)。

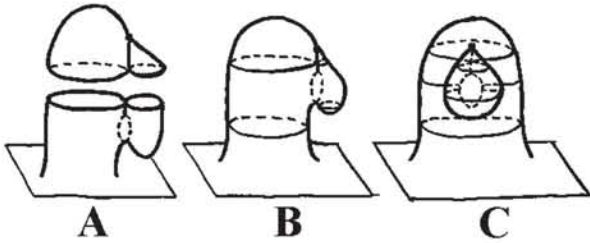


図 15 変形後のクロスキャップ全体

こうしておいて、上部と下部を貼り戻す (図 15B)。これを右側から見てみる (図 15C)。手の指の腹に涙のような形をしているものが貼り付いているように見える。この「涙」の接着部分は上部では自己交叉している、下部では1本の円周になっている。この状態でこの記事の紙面に平行な面を $\mathbf{R}^2$ だと思ひ、このまま「素直に」射影する写像 $f$ を考える。この写像 $f$ はカスプ特異点をちょうど1つだけもつ安定写像となる。涙型の先端部分がカスプ特異点であり、その他の点の近くは、折り目特異点または局所的な埋め込みになっている。図 16に「涙」の拡大図が示されている。平面 $\mathbf{R}^2$ に射影したときには、「指」と涙の縁、および涙の接着部分の円周になっている部分にある(青い)線上の点が折り目特異点になり、涙の「頂上」の(赤い)点がカスプ特異点になる。■

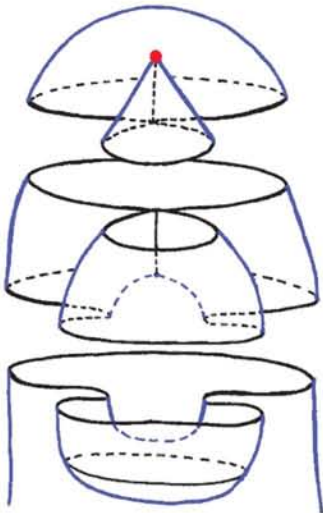


図 16 変形後のクロスキャップの拡大図

注 3.6. 射影平面から $\mathbf{R}^2$ へのちょうど1個のカスプ特異点を持つ安定写像は[2,3]でも構成されているが、上の定

理 3.5 で与えたものとは異なる。

定理 3.5 の証明中の構成の系として、次の系 3.7 を得る。これはカスプ特異点に関するWhitney-Thomの合同式の評価が最良であることを示している。

系 3.7.

- (イ) 任意の種数の向き付け可能閉曲面から $\mathbf{R}^2$ への、任意に与えた(非負)偶数個のカスプ特異点を持つ安定写像が構成できる。
- (ロ) 任意の偶数種数の向き付け不可能閉曲面から $\mathbf{R}^2$ への、任意に与えた(非負)偶数個のカスプ特異点を持つ安定写像が構成できる。
- (ハ) 任意の奇数種数の向き付け不可能閉曲面から $\mathbf{R}^2$ への、任意に与えた(非負)奇数個のカスプ特異点を持つ安定写像が構成できる。

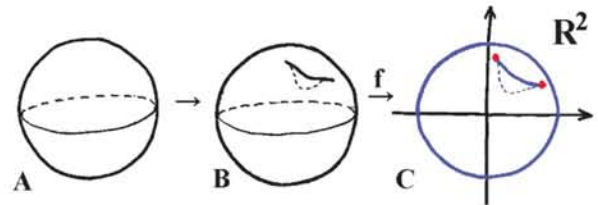


図 17 カスプ特異点の生成

この系を証明するために次の補題が必要である。

補題 3.8. カスプ特異点をちょうど2つだけ持つ、球面から $\mathbf{R}^2$ への安定写像が構成できる。

補題 3.8 の証明. 球面の表面を球面の内側へと「ポケット」を作り、このポケットを持つ球面を図 17 のようにつぶす $\mathbf{R}^2$ への写像 $f$ を構成する。そうすると、このポケットの「上部」の両端の(赤い)2点がカスプ特異点となる。この2点以外の点は(青く描かれた)折り目特異点または非特異点になって(いて、かつ前に述べた大域的条件も充たされて)いるので、写像 $f$ はカスプ特異点をちょうど2つ持つ安定写像である。■

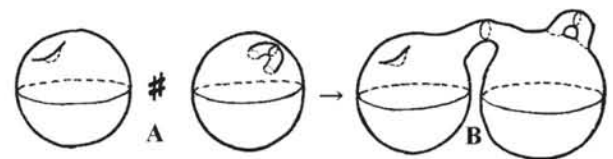


図 18 連結和(向き付け可能曲面)

系 3.7 の証明. 定理 3.5 によって任意の向き付け可能閉

曲面から $\mathbf{R}^2$ への、カusp特異点を持たない安定写像が構成できる。この閉曲面と補題 3.8 で構成した球面からのカusp特異点を 2 つ持つ安定写像の「連結和」を、図 18 のようにとる。このようにして、元の閉曲面と同相な閉曲面から $\mathbf{R}^2$ への、カusp特異点をちょうど 2 つ持つ安定写像が得られる。同様のやり方で、補題 3.8 の安定写像を連結和することによってカusp特異点の個数を 2 個ずつ増やすことができる。よって、どんな非負の偶数に対しても、その数に等しい個数のカusp特異点を持つ  $\mathbf{R}^2$  への安定写像を、任意の向き付け可能閉曲面上に構成することができる。このようにして (イ) が証明できる。

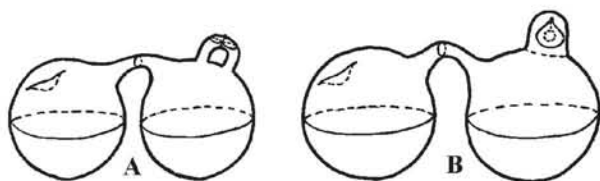


図 19 : 連結和 (向き付け可能曲面)

(ロ) および (ハ) も (イ) と同様に、それぞれの閉曲面に対して定理 3.5 で作った安定写像に、補題 3.8 の安定写像を連結和していくことによって、カusp特異点の個数をちょうど 2 個ずつ変化させることができるのである。これによって (ロ) と (ハ) も容易に証明することができる。図 19 は (ハ) の種数 1 の場合の最初のステップを表している。■

## 謝辞.

愛知教育大学の山本稔先生には本論文を作成するにあたって、電子メール等で有益な協力をいただいた。ここに感謝の意を表する。

## 参考文献

- 1) George K. Francis and Jeffrey R. Weeks: Conway's ZIP Proof, *Amer. Math. Monthly* 106 (1999), no. 5, 393-399.
- 2) T. Kálmán: Stable maps of surfaces into the plane, *Topology Appl.* 107 (2000), no. 3, 307-316.
- 3) K. Millet: Generic smooth maps of surfaces, *Topology Appl.* 18 (1984), no. 2-3, 197-215.
- 4) 足立正久: 埋め込みとはめ込み, 岩波書店(1984).
- 5) 加藤十吉: 位相幾何学, 裳華房(1988).

- 6) 佐久間一浩: トポロジー集中講義 —— オイラー標数をめぐって, 培風館(2006).
- 7) W. Dyck: Beiträge zur Analysis situs I, *Math. Ann.* 32 (1888), 459-512.
- 8) D. Fermer and T. Stanford: *Knots and Surfaces*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- 9) G. Francis and B. Collins: On knot-spanning surface: An illustrated essay on topological art, In Mihiele Emmer, editor, *The Visual Mind: Art and Mathematics*, chapter 11, MIT Press, Cambridge, MA, 1993.
- 10) T. Radò: Über den Begriff der Riemannschen Fläche, *Acta Litt. Sci. Szeged* (1925), 101-102.
- 11) H. Seifert and W. Threlfall: *Lehrbuch der Topologie*. Teubner, Leipzig, 1934. Translated into English as *A Textbook of topology*, Academic Press, New York, 1980.
- 12) J. Weeks: *The Shape of Space*, Marcel Dekker, New York, 1985.
- 13) 鴻巣ゆう: 曲面の分類定理の ZIP 証明とその安定写像への応用について, 信州大学大学院総合工学系研究科修士論文(2010 年).