成蹊大学理工学研究報告
J. Fac. Sci.Tech., Seikei Univ.
Vol.60 No.1･2 (2023)pp.29-32
（特別研究費に係る論文）

切手折りに関連する順序理論

賈　伊陽[*1]，三谷　純[*2]

Order Theory in Strip Folding

Yiyang JIA[*1], Jun MITANI[*2]

(Received October 28, 2023)

１．研究の背景・目的

本研究では、切手折りの枠組みの中で順序体系を構築し、その後、この文脈で独自の体系化された切手折り順序理論を開発する可能性を示すものである。

計算折り紙分野において、切手折り問題に関するアルゴリズムの研究は数多く行われているが、このテーマに対する抽象的な数学的アプローチはまだ確立されていない。本研究では、まず、圏論の複雑な用語の使用を避け、順序理論の基本的な用語を用いて、切手折りを例として、平坦折りの折る対象と折る過程の関係および状態遷移を整理する。次に、圏論の利用は必要最小限にとどめ、順序理論の基本概念を利用した、よりわかりやすいアプローチを用いて、この体系における様々な折りたたみモデルの表現、前順序のmeetとjoin、上位集合、およびそれらに対応する関手に関する様々なトピックを議論する。このワークフロー全体は、抽象的な方法で切手折りを効率的に表現することを可能にし、様々な代数的・抽象幾何学的構造の探索を容易にする。さらに、層の構造を例として、我々のアプローチの有効性を示す。

２．切手折りの折り畳み状態と状態遷移

切手折りの部分的または完全に折り畳まれた状態（サイズが１×１になる状態）において、重なり合ったレイヤーの間に半順序が存在する。例えば、図 1-1 の上部に示される二つの完全に折り畳まれた状態は、下から上へと並べたすべての正方形をそれぞれ全順序 (1, 2, 3, 4, 5) および(3, 1, 2, 5, 4)で表すことができる。一方で、部分的に折り畳まれた状態では、現在の下から上へと並べられた正方形の順序ではなく、完全に折り畳まれた状態に達する際の予想される順序を記録する。例として、図 1-1 の下部に示される二つの部分的に折り畳まれた状態は、それぞれ半順序集合{(6, 5), (1, 4, 7), (3, 2)}および{(1, 4, 7, 6, 5), (3, 2)}で表される。

次に、状態遷移を表現するための二つの演算、すなわち置換(permutation)生成(creation)を定義する。これらは図１で示されている二つの状態遷移にそれぞれ対応している。置換演算により、レイヤーの重なり順は変更されるが、「Overlapping Set」のような重なりの半順序に対する忘却関手を適用した結果の半順序の基底集合は不変である。一方、生成演算を用いると、既存の隣接関係は維持されるが、新しい隣接関係が追加される。

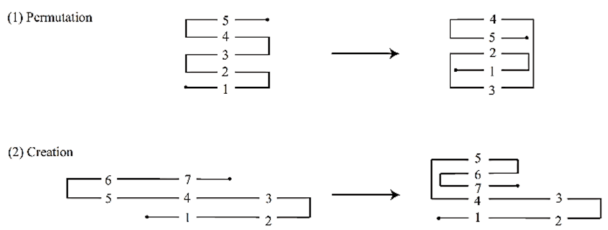

図１-１（上）置換演算による折り畳み状態の状態遷移
図１-２（下）生成演算による折り畳み状態の状態遷移

３．切手折りの順序システム

定義した二種類の折り操作を基に、長さnの紙の帯の切手折りの順序システムを構築する。この順序システムは(V, ≤)のペアで表される。ここで、Vは平坦に折り畳まれた可能なすべての状態を含む集合であり、≤はV上で定義される二項関係を示す。具体的に、任意の二つの平坦状態sとtに対して、sからtへの状態遷移が置換や生成の操作で可能であれば、s≤ tとする。

置換操作によって生じる状態遷移は逆操作も可能なた

*1：情報科学科助教 (jiayiyang@st.seikei.ac.jp)
*2：筑波大学システム情報科学科教授

め、V上で同値関係を形成する。対照的に、生成操作による状態遷移は逆転させることができないので、それはV上の半順序を形成する。これら二つの導出された順序を統合すると、V上の二項関係「≤」は反射律と推移律を満たす前順序(preorder)であることが明らかになる。

同値関係によって関連付けられるすべての状態を同値と見なすことで、Vの商集合V/~を導き出すことができる。これはVの特定の分割を表す。このようにして得られる順序システムの商(V, ≤)/~は(P, <)として示される。ここで、Pの各要素は置換操作下で同値となる状態の同値類を示す。(P, <)では、生成操作によって生じる二項関係だけが考慮され、それによって半順序がP上での<として定義される。そして、PとVを圏として捉えると、PはVの骨格、すなわちskeleton categoryとして扱える。

同値類から成る順序システムPは有界束となる。この結論を明らかにするため、P上の上界、上限、下界、および下限を定義する。圏論の観点から見ると、上限と下限はそれぞれ積と余積に対応する。Pの部分集合に含まれる、ある平坦状態の同値類の集合Sが上界Bを持つ場合、Sに属する任意の平坦状態Aに対し、Bという状態がAの全ての正方形レイヤーの隣接関係を持つ状態と同値である必要がある。さらに、Pの任意の部分集合は常に上界を持つ。これは、ある部分集合に対して、完全に折り畳まれた状態の同値類が上界として存在するためである。Pを圏として考えると、この完全に折り畳まれた状態の同値類はPの終対象として捉えられる。

双対的に、Pの部分集合の下界を考慮する。ある平坦状態の同値類からなる集合Sが下界Uを持つ場合、Uと同値の状態の正方形レイヤーの隣接関係はSに属する全ての状態に存在する。同様にして、Pの任意の部分集合は常に下界を持つことが確定する。これは、全ての部分集合において、完全に展開された状態が下界として存在するためである。Pを圏として捉える際、この完全に展開された状態はPの始対象として考えられる。

有界束の構造を活用することで、Heyting代数を具体的に構築することが可能となる。例えば、切手折りの順序システムにおける特定の重なり集合と隣接関係が定義された場合、命題「その重なりを持つ状態に自己交差が存在するか？」の真理値をHeyting代数で取り扱う場合、それを「自己交差が存在せず、かつその重なりを持つ最大の状態」として表現することができる。

異なる折りモデルから導出された順序システム間の関係を考察した結果、同じ紙の帯に関しては、全層単純折りの順序システムから一般折りの順序システムへの単調写像が存在することが分かった。さらに、他の単純折りモデルが全層単純折りと同じ性質を持たないことも確認できた。

さらに、切手折りの順序システムを基にグラフ構造を導出し、その上にさらに層を構築することが可能である。平坦状態を頂点として、≦という関係に基づいて辺を持つ有向グラフを形成する。次に、グラフの頂点と辺を対象とし、各有向辺の二つの頂点からその辺への射を定義する。これにより、以下のような層の構造を形成できる。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} : G^{op} &\to \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \\
v &\mapsto \mathcal{F}(v) \\
e &\mapsto \mathcal{F}(e) \\
\mathcal{F} : \mathrm{Hom}(v, e) &\to \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \\
\lhd &\mapsto \mathcal{F}_{v \lhd e}
\end{aligned}
$$

図２　切手折りの順序システムに基づく層の構築

最後に、米田の補題を具体的な例として理解するための切手折りにおける対応を紹介する。まず、このシステムで「上方集合」を定義する。集合Xが「a ϵ Xで、a ≤ bの場合は必ず b ϵ Xとなる」という性質を満たすとき、Xを上方集合と称する。任意の平坦状態u,v及びそれらの上方集合Uu, Uvとの関係は、反変関手として解釈できる。米田の補題を利用することで、図３に示される可換図式を得られる。また、米田の補題を用いて、異なる重なり集合を持つ平坦状態が同じ上方集合を持つことはないという結論を導出した。

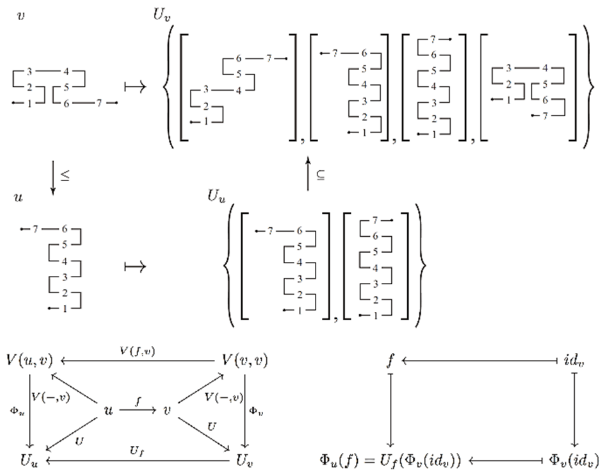

図３　米田の補題の具体例となる切手折りでの対応

５．結論

本研究での結論を以下に列挙する。

①切手折りに対応する順序理論を構築した。

②「置換」と「生成」演算をそれぞれ同値関係と半順序

に翻訳し、商順序システムを導き出し、有界束とHeyting代数を構築した。
③切手折り順序システムとクラフ理論、層論、圏論における重要な米田の補題の関連性を示した。

参考文献

［1］ Fong, Brendan, and David I. Spivak, Seven sketches in compositionality: An invitation to applied category theory, arXiv:1803.05316, 2018.